На правах рукописи

Ульянов Евгений Валерьевич

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

Екатеринбург 2010

Работа выполнена на кафедре теоретической механики ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького».

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор Долгий Юрий Филиппович

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук Ким Аркадий Владимирович

доктор физико–математических наук, профессор Ряшко Лев Борисович

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Пермский государственный университет»

Защита состоится «17» февраля 2010 г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 по защите докторских и кандидатских диссертаций при ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького» по адресу:
620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького».

Автореферат разослан "15" января 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом находят приложения при математическом моделировании технических[1 2 3], биологических[4] и многих других систем[5].

В конце сороковых – начале пятидесятых годов XX века в связи с потребностями ряда прикладных наук началось усиленное систематическое изучение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Толчком к развитию этой теории в Советском Союзе послужили работы А.Д. Мышкиса[6]. Обобщая идеи и методы обыкновенных дифференциальных уравнений, важные результаты в теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом получили Н.В. Азбелев[7], Р. Беллман[8], М.А. Зверкин, Г.А. Каменский, Ю.С. Колесов, К. Кук, В.П. Максимов, Д.И. Мартынюк, Ю.А. Митропольский, Б.С. Разумихин, Л.Ф. Рахматуллина, Д.Я. Хусаинов, Л.Э. Эльсгольц и другие математики.

Начало нового этапа в исследовании дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом связано с работами Н.Н. Красовского, предложившего рассматривать решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в функ-

---

[1] *Эльясберг М.Е.* Расчет металлорежущих станков на устойчивость процесса резания // Станки и инструмент. 1959. №3. С. 3–7.

[2] *Эльясберг М.Е.* Основы теории автоколебаний при резании металлов // Станки и инструмент. 1962. №10. С. 3–8.

[3] *Городецкий Ю.И., Грезина А.В.* О самовозбуждении колебаний при точении валов // Станкоинструмент. М., 1999. № 8. С. 1-18.

[4] *Gopalsaty K.* Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Dortrecht: Kluwer Academic Publishers. 1972. 502p.

[5] *Колмановский В.Б., Мышкис А.Д., Носов В.Р.* Современная теория уравнений с последействием с позиций ее приложения // Совр. проблемы математической физики, Труды Всес. симпозиума, Тбилиси. 1987. С. 280–290.

[6] *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., 1972. 352с.

[7] *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384с.

[8] *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548с.

циональном пространстве состояний[9]. Такой подход создал условия для эффективного привлечения к исследованию дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом методов функционального анализа. С этих позиций значительный вклад в теорию дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом внесли Ю.Г. Борисович, А.В. Ким[10], В.Б. Колмановский[11], Н.Н. Красовский, А.Б. Куржанский, В.И. Максимов, Г.Н. Мильштейн, В.Р. Носов, Ю.С. Осипов, В.Г. Пименов, Ю.М. Репин, Дж.К. Хейл[12], С.Н. Шиманов и другие.

Цель работы. Разработка конструктивных методов нахождения областей асимптотической устойчивости для линейных периодических моделей с постоянными запаздываниями, которые позволяют находить аналитические достаточные признаки асимптотической устойчивости, вычислять бифуркационные значения параметров и использовать численные методы для построения границ областей асимптотической устойчивости. Приложение предложенных методов исследования асимптотической устойчивости к задаче нахождения областей асимптотической устойчивости и бифуркационных значений параметра для математической модели процесса фрезерования.

Методы исследования. В основе теоретических исследований лежит первый метод Ляпунова для линейных периодических систем дифференциальных уравнений с последействием, описывающий свойство асимптотической устойчивости этих систем в терминах спектра оператора монодромии. Его реализация связана с решением сложной математической задачи оценки расположения спектра оператора монодромии. Для линейных периодических систем дифференциальных уравнений с запаздываниями соизмеримыми с периодом этот спектр определяется собствен-

---

[9] *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211с.

[10] *Ким А.В., Пименов В.Г.* i – Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 256с.

[11] *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448с.

[12] *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421с.

ными числами специальной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В первой главе обобщается на периодические системы с запаздываниями кратными периоду метод исследования автономных систем с запаздываниями на абсолютную устойчивость. Он сводит исследование на асимптотическую устойчивость периодической системы с запаздываниями к аналогичной задаче для однопараметрического семейства периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При нахождении коэффициентных достаточных условий асимптотической устойчивости линейных периодических систем дифференциальных уравнений с запаздываниями кратными периоду использовались методы построения квадратичных функций Ляпунова для линейных периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенные В. А. Якубовичем.

Несамосопряженность краевых задач определяющих собственные числа оператора монодромии сильно осложняет оценку расположения его спектра. Последняя задача во второй главе заменяется оценкой сингулярных чисел оператора монодромии, для определения которых строится специальная самосопряженная краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений. При оценке расположения спектра самосопряженной краевой задачи используются бифуркационные методы. При нахождении достаточных условий асимптотической устойчивости линейных периодических систем дифференциальных уравнений с запаздыванием вычисляется бифуркационное значение параметра. Теоретические результаты, полученные в первых двух главах, позволяют найти часть области устойчивости в пространстве параметров, от которых зависят коэффициенты системы.

При нахождении границы области асимптотической устойчивости на плоскости параметров для математической модели процесса фрезерования в третьей главе используются численные методы. Краевая задача для спектра оператора монодромии позволяет построить характеристическое уравнение, содержащее функцию неявно определяемую краевой задачей. При выводе дифференциальных уравнений, определяющих границу области асимптотической устойчивости используется метод Д – разбиения, в случае единичного круга. Начальные значения для решений этих дифференциальных уравнений находятся методом Ньютона. Предложен корректный метод вычисления частных производных неявно определенной в характеристическом уравнении функции, которые используются при численном интегрировании дифференциальных уравнений и численной реализации метода Ньютона в задаче нахождения границы области асимптотической устойчивости. При построении приближенного полиномиального характеристического уравнения используется интерполяционный многочлен Лагранжа. Вычисления проводились в программном пакете MATHEMATIKA 5, который позволяет эффективно реализовать предложенные вычислительные алгоритмы и выполнить визуализацию результатов расчетов.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

- на основе второго метода Ляпунова для линейных периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений разработан конструктивный метод нахождения достаточных условий асимптотической устойчивости линейных периодических систем дифференциальных уравнений с запаздываниями кратными периоду;

- для линейных периодических систем дифференциальных уравнений с запаздыванием соизмеримым с периодом предложен метод позволяющий находить оценку спектрального радиуса оператора монодромии, вычисляя собственные числа самосопряженных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений;

- на основе метода Д - разбиения для единичного круга предложен корректный численный метод построения границы области асимптотической устойчивости для математической модели процесса фрезерования.

Теоретическая и практическая ценность. Теоретическая значимость разработанных методов заключается в том, что они могут быть использованы для нахождения областей асимптотической устойчивости для линейных периодических моделей с запаздыванием. Практическая значимость исследования заключается в том, что результаты диссертации могут быть использованы специалистами по математическому моделированию при качественном исследовании конкретных динамических моделей с запаздыванием.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором и обсуждались на 34-й, 35-й, 36-й, 37-й региональных молодежных конференциях «Проблемы теоретической и прикладной математики» (Екатеринбург, 2003, 2004, 2005, 2006 гг.); XXVII Юбилейной конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ "Ломоносов-2005"(Москва, 12.04-16.04.2005); IX международном семинаре им. Е. С. Пятницкого "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"(Москва, 31.05-02.06.2006); международном научном семинаре "Устойчивость, управление и моделирование динамических систем"(Екатеринбург, 15.11-17.11.2006); международной конференции "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация"(Минск, 29.09-04.10.2008) и научном семинаре кафедры теоретической механики УрГУ.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации составляет 126 страниц. Библиографический список включает 177 наименований.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-14].

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается краткий обзор истории вопроса исследования дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, определяется объект исследования, излагаются основные результаты диссертации.

В первой главе рассматривается периодическая система дифференциальных уравнений с запаздываниями

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{m} A_k(t)x(t-k\omega), \tag{1}$$

где $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\omega > 0$, A_k $(k = 0, \dots, m)$ — ω-периодические кусочно-непрерывные матричные функции.

Системе (1) поставим в соответствие однопараметрическое семейство систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \widetilde{A}(t,z)x, \tag{2}$$

где $\widetilde{A}(t,z) = \sum_{k=0}^{m} z^k A_k(t), t \in \mathbb{R},\ z \in C$. Здесь C обозначает множество комплексных чисел.

При нахождении коэффициентных достаточных условий асимптотической устойчивости системы (2) использовались методы построения квадратичных функций Ляпунова, предложенные В. А. Якубовичем[13].

Для линейного периодического дифференциального уравнения второго порядка с запаздываниями:

$$\ddot{x}(t) + \sum_{k=0}^{m} (P_k(t)\dot{x}(t-k\omega) + Q_k(t)x(t-k\omega)) = 0, \tag{3}$$

где $x:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\dot{P}_k$ и Q_k $(k = 0,\ \ldots,\ m)$ — кусочно-непрерывные, ω-периодические функции, справедливо утверждение.

Теорема 1. *Для асимптотической устойчивости уравнения* (3) *достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

1) $$\frac{1}{2\sqrt{p_{0max}}}(p_{0max} - p_{0cp}) + \frac{1}{2\omega\sqrt{p_{0max}}}\sum_{k=1}^{2m}\int_0^\omega |p_k(t)|dt <$$
$$< \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega \left(P_0(t) - \sum_{k=1}^{m}|P_k(t)|\right)dt \quad \textit{при} \quad p_{0max} + p_{0cp} > 0,$$

2) $$\sqrt{-p_{0cp}} + \frac{1}{2\omega\sqrt{-p_{0cp}}}\sum_{k=1}^{2m}\int_0^\omega |p_k(t)|dt <$$
$$< \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega \left(P_0(t) - \sum_{k=1}^{m}|P_k(t)|\right)dt \quad \textit{при} \quad p_{0max} + p_{0cp} \le 0,$$

---

[13] *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720с.

3) $$\frac{1}{2\omega}\ln\frac{p_0(t_1^+)...p_0(t_n^+)}{p_0(t_1^-)...p_0(t_n^-)}+\frac{1}{2\omega}\sum_{k=1}^{2m}\int\limits_0^{\omega}\frac{|p_k(t)|}{\sqrt{p_0(t)}}dt<$$

$$<\frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\omega}\left(P_0(t)-\sum_{k=1}^{m}|P_k(t)|\right)dt$$

при кусочно-непрерывно дифференцируемой функции p_0, $p_0(t)>0,\ t\in\mathbb{R}$.

Здесь $p_k(t)=Q_k(t)-\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{k}P_i(t)P_{k-i}(t)-\frac{1}{2}\dot{P}_k(t),\ k=\overline{0,m}$, $p_k(t)=-\frac{1}{4}\sum_{i=k-m}^{m}P_i(t)P_{k-i}(t),\ k=\overline{m+1,2m},\ t\in\mathbb{R}$, $p_{0cp}=\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega}p_0(t)dt$, $p_{0max}=\max\limits_{t\in[0,\omega]}p_0(t)$, $t_1^+,...,t_n^+$ *точки максимумов, а* $t_1^-,...,t_n^-$ *точки минимумов функции* p_0 *на полуоткрытом отрезке* $[0,\omega)$.

Для периодической системы дифференциальных уравнений второго порядка с запаздываниями

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\nu_0\frac{du(t)}{dt}+\sum_{k=0}^{m}B_k(t)u(t-k\omega)=0, \tag{4}$$

где $u:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $\omega>0$, B_k $(k=0,\ \dots,\ m)$ — ω-периодические кусочно-непрерывные матричные функции, ν_0 — положительное число, справедливо утверждение.

Теорема 2. *а) Пусть C — произвольная ω-периодическая кусочно - непрерывная матричная функция, $C(t)$, $t\in\mathbb{R}$, — положительно определенные эрмитовы матрицы. Тогда для асимптотической устойчивости системы* (4) *достаточно, чтобы выполнялось следующие условие*

$$\frac{1}{\omega}\left(\int\limits_0^{\omega}q_0(t)dt+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^{\omega}\left|C(t)^{-\frac{1}{2}}B_k(t)C(t)^{-\frac{1}{2}}\right|dt\right)<\nu_0, \tag{5}$$

где $q_0(t)$ *— норма матрицы*

$$Q_0(t)=\begin{pmatrix} C(t)^{-\frac{1}{2}}C(t)C(t)^{-\frac{1}{2}} & C(t)-C(t)^{-\frac{1}{2}}P_0^*(t)C(t)^{-\frac{1}{2}} \\ C(t)-C(t)^{-\frac{1}{2}}P_0(t)C(t)^{-\frac{1}{2}} & -C(t)^{-\frac{1}{2}}\dot{C}(t)C(t)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

В частном случае постоянной матрицы C неравенство (5) принимает вид

$$\frac{1}{\omega}\left(\int\limits_0^{\omega}\left|C - C^{-\frac{1}{2}}\left(B_0(t) - \frac{1}{4}\nu_0^2 I_n\right)C^{-\frac{1}{2}}\right| dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^{\omega}\left|C^{-\frac{1}{2}}B_k(t)C^{-\frac{1}{2}}\right| dt\right) < \nu_0.$$

б) Пусть $B_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — эрмитовы матрицы и $\beta_{0min}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — их наименьшие собственные значения, $B_k(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$, $t \in \mathbb{R}$, — положительно определенные эрмитовы матрицы и $\beta_{kmax}(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$, $t \in \mathbb{R}$, их наибольшие собственные значения. Предположим, что $B_0(t) \leq \alpha^2 I_n$, $t \in \mathbb{R}$, где $\alpha > 0$ — некоторое число. Тогда для асимптотической устойчивости системы (4) достаточно, чтобы выполнилось условие

$$\alpha - \frac{1}{\alpha\omega}\left(\int\limits_0^{\omega}\left(\beta_{0min}(t) - \frac{1}{4}\nu_0^2\right)dt + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^{\omega}\beta_{kmax}(t)dt\right) < \nu_0.$$

в) Пусть $B_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — эрмитовы матрицы и $\beta_{0max}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — их наибольшие собственные значения, $B_k(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$, $t \in \mathbb{R}$, — положительно определенные эрмитовы матрицы. Тогда для асимптотической устойчивости системы (4) достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1) $\dfrac{\beta_0 - \beta_{0cp}^-}{\sqrt{\beta_0}} + \dfrac{1}{\sqrt{\beta_0}}\left(\dfrac{1}{4}\nu_0^2 + \sum\limits_{k=1}^{m}\beta_{kcp}^+\right) < \nu_0$ *при* $\beta_0 + \beta_{0cp}^+ > 0$,

2) $\dfrac{-\beta_{0cp}^+ - \beta_{0cp}^-}{\sqrt{-\beta_{0cp}^+}} + \dfrac{1}{\sqrt{-\beta_{0cp}^+}}\left(\dfrac{1}{4}\nu_0^2 + \sum\limits_{k=1}^{m}\beta_{kcp}^+\right) < \nu_0$

при $\beta_0 + \beta_{0cp}^+ \leq 0$,

3) $\dfrac{\beta_0 - \beta_{0cp}^-}{\sqrt{\beta_0}} + \dfrac{1}{\sqrt{\beta_0}}\left(\dfrac{1}{4}\nu_0^2 + \sum\limits_{k=1}^{m}\beta_{kcp}^+\right) < \nu_0$ *при* $\beta_0 + \beta_{0cp}^- > 0$,

4) $\sqrt{-\beta^-_{0cp}} + \frac{1}{\sqrt{-\beta^-_{0cp}}}\left(\frac{1}{4}\nu_0^2 + \sum_{k=1}^{m}\beta^+_{kcp}\right) \leq \nu_0$ *при* $\beta_0 + \beta^-_{0cp} \leq 0.$

Здесь $\beta_0 = \max\limits_{0\leq t\leq\omega} \beta_{0max}(t)$, $\beta^+_{0cp} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \beta_{0max}(t)dt$,

$\beta^-_{0cp} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \beta_{0min}(t)dt$, $\beta^+_{kcp} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \beta_{kmax}(t)dt$ $(k = 1, \ldots, m)$.

г) Пусть $B_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *эрмитовы матрицы*, $P_0(t) = B_0(t) - \frac{1}{4}\nu_0^2 I_n > 0$, $t \in \mathbb{R}$, *и существует кусочно-непрерывная производная* $\dot{B}_0$. *Тогда для асимптотической устойчивости системы* (4) *достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \sqrt{|P_0(t)^{-\frac{1}{2}}|\sum_{k=1}^{n}|B_k(t)| + |P_0(t)^{-\frac{1}{2}}\dot{B}_0(t)P_0(t)^{-\frac{1}{2}}|}dt < \nu_0.$$

Во второй главе рассматривается линейная периодическая система дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau), \tag{6}$$

где $x: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$; $\omega > 0$; A, B — ω-периодические матричные функции, с кусочно-непрерывными элементами. Предполагается, что кусочно-непрерывные функции имеют конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[0,\omega]$. Запаздывание τ ($\tau = \omega/m$, где m - целое число) рационально соизмеримо с периодом ω.

Оператор монодромии U действует в гильбертовом функциональном пространстве состояний $\mathbf{H} = \mathbf{L}_2([-\tau,0),\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n$ со скалярным произведением $(\varphi,\psi) = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-\tau}^{0}\psi^\top(\vartheta)\varphi(\vartheta)d\vartheta$. Оператор монодромии является вполне непрерывным и определяется формулой $(U\varphi)(\vartheta) = x(\omega+\vartheta,\varphi)$, $\vartheta \in [-\tau,0]$, в которой $x(\cdot,\varphi)$ решение системы (6) с начальным моментом $t_0 = 0$ и начальной функцией φ. В гильбертовом пространстве собственные числа оператора $H = (U^*U)^{1/2}$ называются сингулярными числами вполне непрерывного оператора U.

Теорема 3. *Положительное число s тогда и только тогда является сингулярным числом оператора монодромии U, когда следующая краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx_1}{d\vartheta} = A_1(\vartheta)x_1 + zB_1(\vartheta)B_1^\top(\vartheta)y_1,$$

$$\frac{dx_k}{d\vartheta} = A_k(\vartheta)x_k + B_k(\vartheta)x_{k-1}, \ k = \overline{2,m},$$

$$\frac{dy_k}{d\vartheta} = -A_k^\top(\vartheta)y_k - B_{k+1}^\top(\vartheta)y_{k+1}, \ k = \overline{1,m-1},$$

$$\frac{dy_m}{d\vartheta} = -A_m^\top(\vartheta)y_m - zx_m, \tag{7}$$

$$x_1(-\tau) = zy_1(-\tau), \ x_k(-\tau) = x_{k-1}(0), \ k = \overline{2,m},$$

$$y_k(0) = y_{k+1}(-\tau), \ k = \overline{1,m-1}, \ y_m(0) = zx_m(0) \tag{8}$$

имеет ненулевое решение при $z = s^{-1}$. Здесь

$$A_k(\vartheta) = A(k\tau + \vartheta), \ B_k(\vartheta) = B(k\tau + \vartheta), \ \vartheta \in [-\tau, 0], \ k = \overline{1,m}.$$

Краевую задачу (7), (8) можно записать в векторной форме

$$J\frac{du}{d\vartheta} = (\mathcal{H}_1(\vartheta) + z\mathcal{H}_2(\vartheta))\,u, \tag{9}$$

$$(\mathcal{A}_1 + z\mathcal{A}_2)\,u(-\tau) = (\mathcal{B}_1 + z\mathcal{B}_2)\,u(0), \tag{10}$$

где $u = colon(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$.

Утверждение 1. *При вещественном числе z краевая задача* (9), (10) *является самосопряженной.*

Теорема 3. *Положительное число s тогда и только тогда является сингулярным числом оператора монодромии U, когда следующая краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx_1}{d\vartheta} = A_1(\vartheta)x_1 + zB_1(\vartheta)B_1^\top(\vartheta)y_1,$$

$$\frac{dx_k}{d\vartheta} = A_k(\vartheta)x_k + B_k(\vartheta)x_{k-1},\ k = \overline{2,m},$$

$$\frac{dy_k}{d\vartheta} = -A_k^\top(\vartheta)y_k - B_{k+1}^\top(\vartheta)y_{k+1},\ k = \overline{1,m-1},$$

$$\frac{dy_m}{d\vartheta} = -A_m^\top(\vartheta)y_m - zx_m, \tag{7}$$

$$x_1(-\tau) = zy_1(-\tau),\ x_k(-\tau) = x_{k-1}(0),\ k = \overline{2,m},$$

$$y_k(0) = y_{k+1}(-\tau),\ k = \overline{1,m-1},\ y_m(0) = zx_m(0) \tag{8}$$

имеет ненулевое решение при $z = s^{-1}$. *Здесь*

$$A_k(\vartheta) = A(k\tau + \vartheta),\ B_k(\vartheta) = B(k\tau + \vartheta),\ \vartheta \in [-\tau, 0],\ k = \overline{1,m}.$$

Краевую задачу (7), (8) можно записать в векторной форме

$$J\frac{du}{d\vartheta} = (\mathcal{H}_1(\vartheta) + z\mathcal{H}_2(\vartheta))\,u, \tag{9}$$

$$(\mathcal{A}_1 + z\mathcal{A}_2)\,u(-\tau) = (\mathcal{B}_1 + z\mathcal{B}_2)\,u(0), \tag{10}$$

где $u = colon(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$.

Утверждение 1. *При вещественном числе z краевая задача* (9), (10) *является самосопряженной.*

где x – отклонение глубины резания от номинального значения в направлении подачи детали, ξ – коэффициент вязкого трения, ω – собственная частота колебаний конструкции, Ω – угловая скорость вращения фрезы, θ – угол поворота фрезы.

Величина $F(x,\theta)$ характеризует процесс фрезерования. Она описывается коэффициентом направления $v(\theta)$ и характеристикой толщины стружки при резании k^c. В линейном приближении

$$F(x,\theta) = \omega^2 \frac{k^c}{k} v(\theta)[-x(\theta) + x(\theta - \Delta)].$$

Коэффициент $v(\theta)$ учитывает геометрические соотношения, а именно: направление режущего усилия, конфигурацию системы «инструмент-деталь», а также число резаний за 1 оборот, v – периодическая функция, с периодом Δ.

В работе[16] функция v определяется формулой

$$v(\theta) = \sum_{k=0}^{m-1} \sin(\alpha_1 + \theta + \beta + k\Delta) \sin(\alpha_1 + \theta + k\Delta), \ \theta \in [0, \Delta), \quad (15)$$

где β – угол, определяющий направление силы резания относительно радиальной линии фрезы, n – число зубьев фрезы, m – число зубьев находящихся в контакте с обрабатываемой деталью. Угол α_1 определяет положение зуба фрезы в момент входа в материал обрабатываемой детали. В качестве характеристики толщины стружки взят параметр k^c, называемый коэффициентом жесткости резания. Коэффициент k характеризует жесткость конструкции.

Математическая модель фрезерования

$$\nu^2 \frac{d^2 x(\theta)}{d\theta^2} + 2\xi\nu \frac{dx(\theta)}{d\theta} + x(\theta) = \mu v(\theta)(x(\theta - \Delta) - x(\theta)), \quad (16)$$

где $\mu = k^c/k$, $\nu = \Omega/\omega$, применяется для расчета границы области устойчивости на плоскости параметров (ν, μ). Графические изображения границы области устойчивости используют параметры k^c и $10\Omega/\omega$.

---

[16] *Шильман С.В.* Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1978. 336с.

Дифференциальное уравнение второго порядка с запаздыванием (16) представим в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{x}(\theta)}{d\theta} = \mathbf{A}(\theta,\nu,\mu)\mathbf{x}(\theta) + \mathbf{B}(\theta,\nu,\mu)\mathbf{x}(\theta-\Delta), \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$,

$$\mathbf{A}(\theta,\nu,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^{-2}(1+\mu v(\theta)) & -2\xi\nu^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\theta,\nu,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu\nu^{-2}v(\theta) & 0 \end{pmatrix}, \ \theta \in [0,\Delta].$$

Для асимптотической устойчивости периодической системы дифференциальных уравнений (17) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа ρ оператора монодромии были меньше единицы по модулю. Задача нахождения ненулевых собственных чисел ρ оператора монодромии сводится к определению собственных чисел z, $z \in C$, специальной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\phi}{d\vartheta} = (\mathbf{A}(\vartheta,\nu,\mu) + z\mathbf{B}(\vartheta,\nu,\mu))\phi, \ \vartheta \in [-\Delta, 0], z = \rho^{-1}, \tag{18}$$

$$\phi(-\Delta) = z\phi(0), z \in C. \tag{19}$$

Пусть $\Phi(\vartheta,z,\nu,\mu) = \|\phi_{ij}(\vartheta,z,\nu,\mu)\|_{i,j=1}^{2}$ $(\Phi(-\Delta,z,\nu,\mu) = I_2)$, $\vartheta \in [-\Delta, 0]$, $z \in C$, – нормированная фундаментальная матрица системы (18). Для нахождения собственных чисел z краевой задачи (18), (19) имеем следующее характеристическое уравнение

$$D(z,\nu,\mu) = \exp\left(-2\xi\Delta\nu^{-1}\right) z^2 - A(z,\nu,\mu)z + 1 = 0, \tag{20}$$

где $A(z,\nu,\mu) = \left(\phi_{11}(0,z,\nu,\mu) + \phi_{22}(0,z,\nu,\mu)\right)$, $z \in C$.

Согласно методу Д - разбиения, система нелинейных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\Re\left(A(\exp(\mathrm{i}\varphi),\nu,\mu)\right)-\left(\exp\left(-2\xi\Delta\nu^{-1}\right)+1\right)\cos(\varphi)=0,\\
&\Im\left(A(\exp(\mathrm{i}\varphi),\nu,\mu)\right)-\left(\exp\left(-2\xi\Delta\nu^{-1}\right)-1\right)\sin(\varphi)=0,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где $\varphi\in[\pi,2\pi]$, дает неявное представление границы области устойчивости на плоскости параметров ν и μ.

Дифференцируя систему нелинейных уравнений (21) по переменной φ ($\varphi\in(\pi,2\pi)$), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $d\nu/d\varphi$ и $d\mu/d\varphi$. Задача нахождения неявных решений $\nu(\varphi)$, $\mu(\varphi)$ системы нелинейных уравнений (21), на интервалах для которых определитель линейной алгебраической системы $\Delta(\varphi,\nu,\mu)\neq 0$, $\varphi\in(\pi,2\pi)$, заменяется процедурой численного интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
\frac{d\nu}{d\varphi}=\frac{\Delta_1(\varphi,\nu,\mu)}{\Delta(\varphi,\nu,\mu)},\ \frac{d\mu}{d\varphi}=\frac{\Delta_2(\varphi,\nu,\mu)}{\Delta(\varphi,\nu,\mu)},\\
\Delta(\varphi,\nu,\mu)\neq 0,\ \varphi\in(\pi,2\pi),
\end{gathered}
\tag{22}
$$

где $\Delta_1(\varphi,\nu,\mu)$, $\Delta_2(\varphi,\nu,\mu)$ – определители Крамера линейной алгебраической системы. Используя метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений (21) при $\varphi=\varphi^*\in(\pi,2\pi)$, находим начальные значения ν^* и μ^* для реализации процедуры численного интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений.

При реализации процедуры численного интегрирования системы (22) и метода Ньютона значения функции A и её частных производных $\partial A(\exp(\mathrm{i}\varphi),\nu,\mu)/\partial\nu$, $\partial A(\exp(\mathrm{i}\varphi),\nu,\mu)/\partial\mu$ и $\partial A(\exp(\mathrm{i}\varphi),\nu,\mu)/\partial\varphi$ находятся путем численного интегрирования специальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

При $\varphi=\pi$ или $\varphi=2\pi$ система (21) заменяется одним уравнением

$$
\exp\left(-2\xi\Delta\nu^{-1}\right)-A(a,\nu,\mu)a+1=0,\ a=\cos(\varphi). \tag{23}
$$

В этом случае граница области устойчивости будет описываться функцией $\mu = \mu(\nu)$, $\nu \in \mathbb{R}$. Задача нахождения неявного решения уравнения (23) заменяется процедурой численного интегрирования нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{d\mu}{d\nu} = -\frac{\partial A(a,\nu,\mu)/\partial\nu - 2a\xi\Delta\nu^{-2}\exp\left(-2\xi\Delta\nu^{-1}\right)}{\partial A(a,\nu,\mu)/\partial\mu}, \qquad (24)$$

на интервалах, для которых $\partial A(a,\nu,\mu)/\partial\mu \neq 0$. Используя метод Ньютона при некотором $\mu = \mu^*$, из уравнения (23) определяется начальное значение $\nu = \nu^*$.

При реализации процедуры численного интегрирования уравнения (24) и метода Ньютона значения функции A и её частных производных $\partial A(a,\nu,\mu)/\partial\nu$ и $\partial A(a,\nu,\mu)/\partial\mu$ находятся путем численного интегрирования специальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

На рис. 1, 2 приведены результаты расчета границы области асимптотической устойчивости. Приведенные результаты расчетов свидетельствуют о сильной «изрезанности» области устойчивости, следствием которой является существенное влияние величины угловой скорости вращения фрезы Ω на устойчивость процесса фрезерования. Это подтверждает тот экспериментальный факт, что при возникновении вибрационных колебаний часто достаточно незначительного изменения числа оборотов, чтобы стабилизировать процесс фрезерования. Полученные результаты согласуются с аналогичными результатами Sridhar R., Hohn R.E., Long G.W.[14] и Шильмана С.В.[16].

Разработанный комплекс програмных средств позволяет находить границы области асимптотической устойчивости для математической модели процесса фрезерования, а также оценивать влияние параметров на деформацию границы области асимптотической устойчивости.

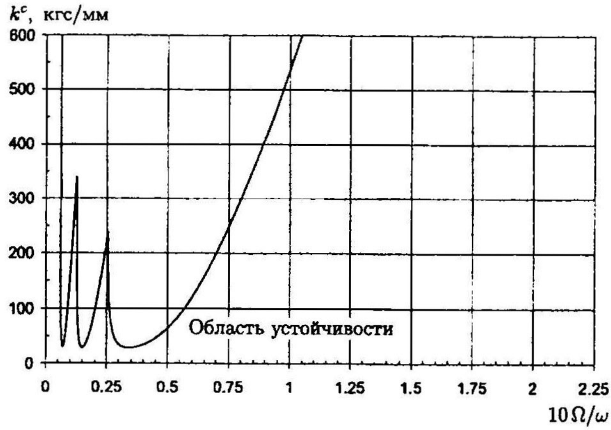

Рис. 1: Граница области устойчивости для математической модели фрезерования при $n = 40$, $\Delta = 9°$, $\beta = 60°$, $k = 710$ кгс/мм, $\xi = 0.0417$, $\alpha_1 = 67°$, $m = 4$.

Рис. 2: Граница области устойчивости для математической модели фрезерования при $n = 10$, $\Delta = 36°$, $\beta = 60°$, $k = 710$ кгс/мм, $\xi = 0.0417$, $\alpha_1 = 84°$, $m = 2$.

Публикации по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК:

[1] Долгий Ю.Ф., Ульянов Е.В. Достаточные условия экспоненциальной устойчивости периодической системы с кратными запаздываниями // Изв. Урал. гос. ун-та. Математика и механика. 2006. №44. Вып. 9. С. 54–75.

[2] *Dolgii Yu, Ul'yanov E.V.* Singular numbers of the monodromy operator and sufficient conditions of the asymptotic stability of periodic system of differential equations with fixed delay // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2007. V. 259. Suppl. 2. P. 95–110.

Другие публикации:

[3] *Долгий Ю.Ф., Ульянов Е.В.* Применение сингулярных чисел оператора монодромии для нахождения достаточных условий экспоненциальной устойчивости периодической системы дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием // Труды института математики и механики УрО РАН. 2007. Т.13. №2. С. 66–79.

[4] *Долгий Ю.Ф., Ульянов Е.В.* Достаточные условия экспоненциальной устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Труды Второй Всероссийской научной конференции, Часть 3. Самарский государственный технический университет. 2005. С. 86–89.

[5] *Долгий Ю.Ф., Ульянов Е.В.* Краевая задача для сингулярных чисел оператора монодромии периодической системы с постоянным запаздыванием // Материалы международной научной конференции «Устойчивость, управление и моделирование динамических систем», Екатеринбург. УрГУПС. 2006. С. 37–38.

[6] *Ульянов Е.В.* Численное построение характеристического уравнения в задаче устойчивости процесса фрезерования //34 Региональная молодежная конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, 2003. С. 129.

[7] *Ульянов Е.В.* Численная реализация метода краевых задач для исследования устойчивости математической модели фрезерования // Уральский гос. ун-т, Екатеринбург. 2004-18с. Деп. 14.12.04. №1984-В2004.

[8] *Ульянов Е.В.* Численное построение областей устойчивости для математической модели фрезерования // 35 Региональная молодежная конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, 2004. С. 192–194.

[9] *Ульянов Е.В.* Численная реализация метода Ньютона в задаче построения границы области устойчивости процесса фрезерования //36 Региональная молодежная конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, 2005. С. 212–216.

[10] *Ульянов Е.В.* Достаточные условия экспоненциальной устойчивости периодического дифференциального уравнения с запаздыванием // XXVII Юбилейной конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ «Ломоносов-2005», Москва, 2005. С. 64–65.

[11] *Ульянов Е.В.* Использование сингулярных чисел оператора монодромии в задаче устойчивости периодической системы с постоянным запаздыванием // Известия Института математики и информатики, Ижевск, УдГУ. 2006. Вып. 3(37). С. 151–152.

[12] *Ульянов Е.В.* Достаточные условия экспоненциальной устойчивости линейного периодического дифференциального уравнения второго порядка с запаздываниями // 37 Региональная молодежная конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, 2006. С. 272–276.

[13] *Ульянов Е.В.* Достаточные условия экспоненциальной устойчивости периодической системы дифференциальных уравнений второго порядка с запаздываниями // IX Международном семинаре им. Е. С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Москва, 2006. С. 270–272.

[14] *Ульянов Е.В.* Исследование устойчивости движений в математической модели фрезерования // Международная конференция «Динамические системы: Устойчивость, управление, оптимизация», Тезисы докладов, Минск, 2008. С. 153–155.

Ульянов Евгений Валерьевич

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Автореферат

Подписано в печать 13.01.2010. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага ВХИ. Печать ризограф.
Гарнитура «Arial».
Тираж 100 экз. Заказ № 4.
Отпечатано в ИПЦ «Издательство УрГУ».
620083, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.